

Колебания. Базовая теория и задачи

*Благин Анатолий Вячеславович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Физика» ФГБОУ ВО
«Донской государственный технический университет»*

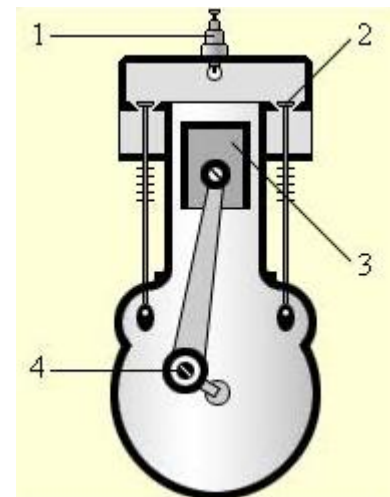
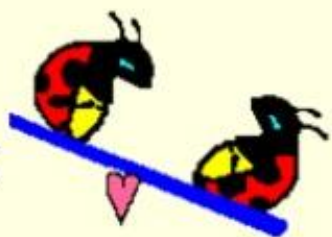
Колебания - это движения, которые точно или приблизительно повторяются через определенный интервал времени.

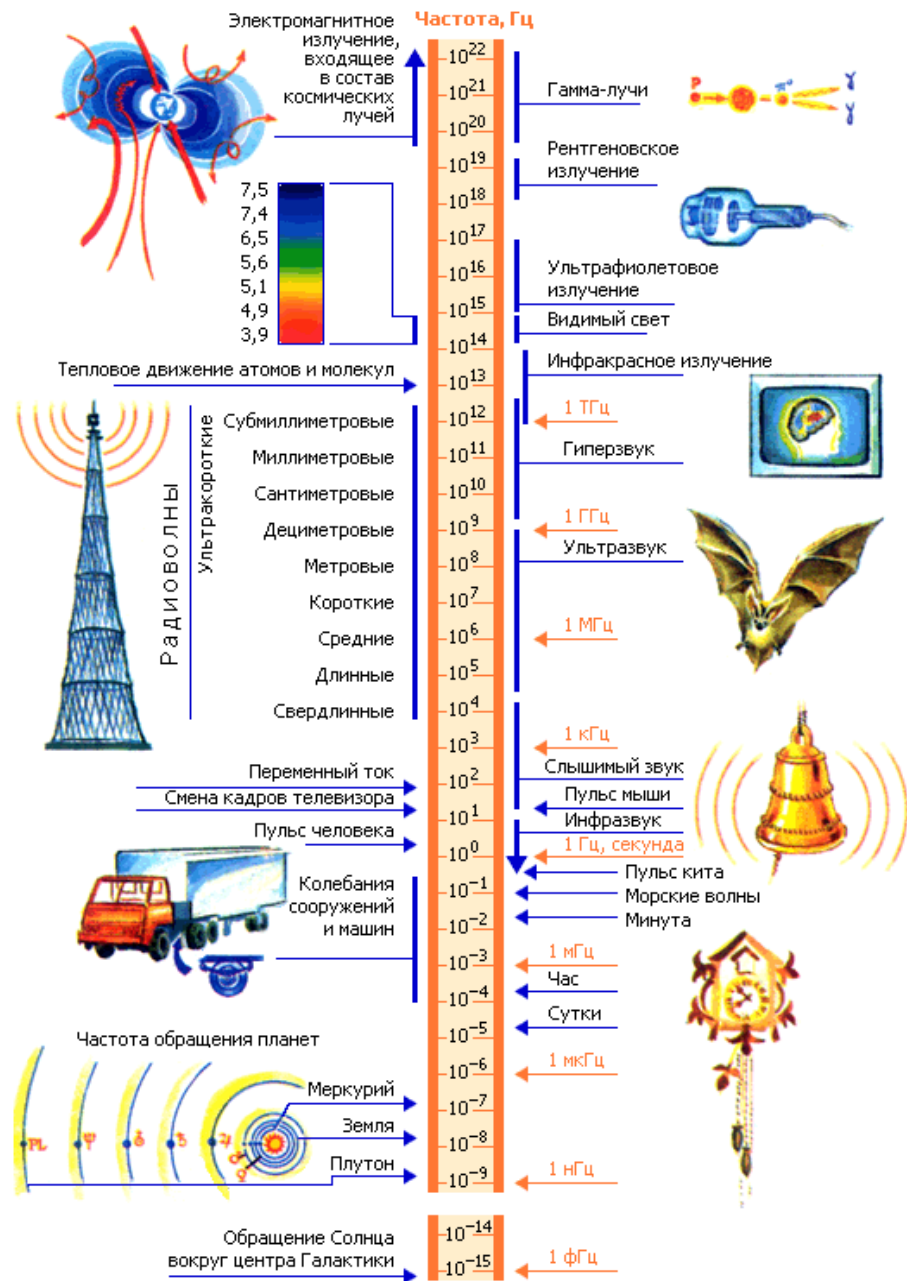


Колебания – один из самых распространенных процессов в природе и технике.

Примеры колебаний

- распространение звука
- распространение света
- движение качелей
- движение маятника часов
- движение поршня ДВС
- землетрясения
- приливы и отливы
- биение пульса
- движение иглы швейной машины





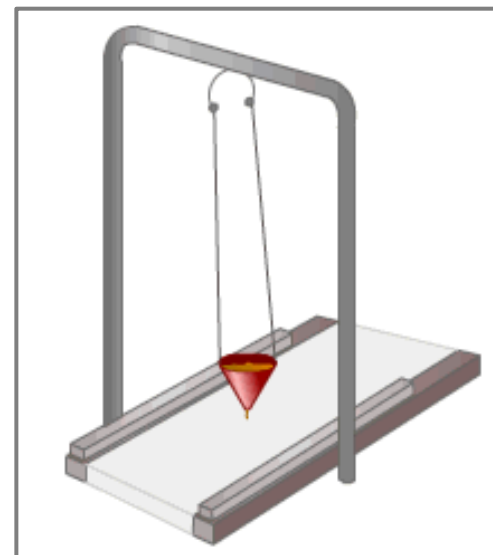
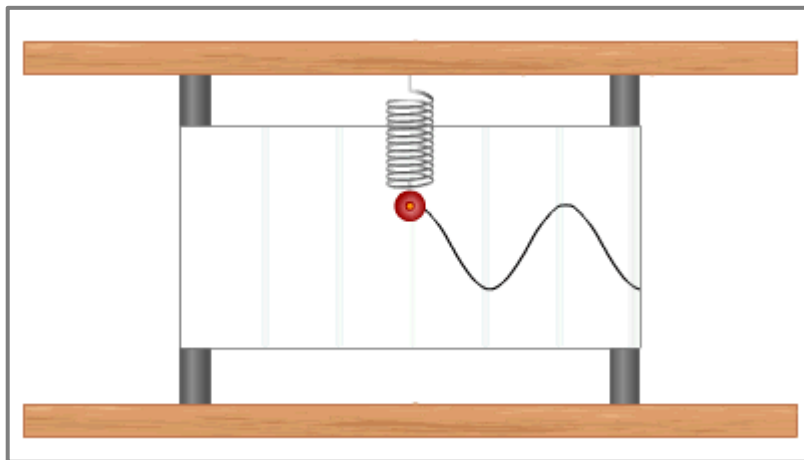
На рисунке приведены значения частот ряда колебательных процессов.

Чтобы поместить на одном рисунке все многообразие частот, встречающихся в природе и технике, применена логарифмическая шкала – два соседних деления отличаются друг от друга по величине в 10 раз.

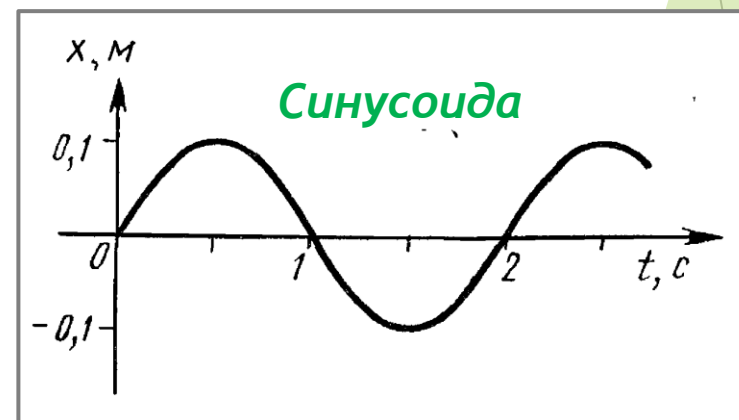
Сердце мыши сокращается гораздо чаще, чем сердце кита. Точные значения этих величин соответственно – 600 и 15 ударов в минуту (в покое). Но в обоих случаях число сокращений за жизнь составляет около 750 000 000. Ученые считают, что продолжительность жизни всех млекопитающих (кроме человека), измеренная числом ударов сердца, примерно одинакова.

Приведены также диапазоны частот различных радиоволн, ультразвука и гиперзвука, морских волн и смены кадров на экране телевизора.

Гармонические колебания



Гармоническими являются колебания, которые происходят под действием силы, пропорциональной смещению колеблющейся точки и направленной противоположно этому смещению. Само смещение зависит от времени по закону синуса или косинуса



Гармонические колебания

$$x(t) = A \sin \omega t$$

$$x(t) = A \sin \frac{2\pi}{T}t$$

Материальную точку, колеблющуюся на не меняющемся со временем расстоянии от точки подвеса, называют *математическим маятником*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$$

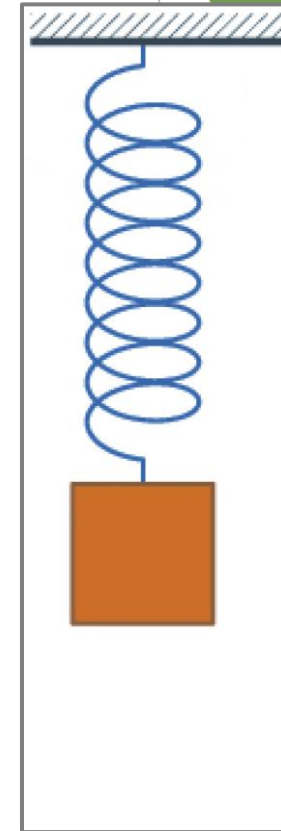


Гармонические колебания

Гармоническими являются малые собственные колебания **пружинного маятника**, если масса пружины мала по сравнению с массой груза

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Задача 1. Двумерные колебания

На гладком столе расположен груз, прикрепленный к бортикам двумя одинаковыми пружинами (см. рис. 1). В положении равновесия пружины растянуты каждая на Δx . Используя систему координат, изображенную на рисунке 2 и анализируя вид траектории груза, совершающего малые колебания, получите выражения для частот груза и найдите Δx , если длина пружин в недеформированном состоянии равна ℓ_0 .

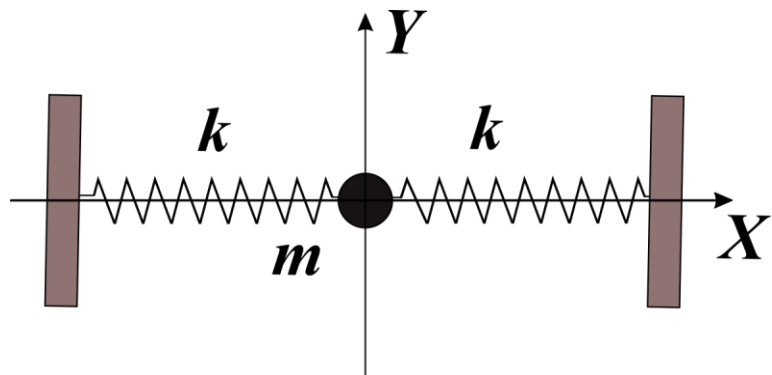


Рис.1



Рис.2

Решение.

При отклонении грузика вдоль оси OX на малую величину x в пружине возникает возвращающая сила $F_x = 2kx$. Частота колебаний вдоль этой оси

$$\omega_x = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (1)$$

где m – масса груза, k – жесткость пружины. Вдоль оси OY возвращающая сила определяется малым смещением y и «поперечной жесткостью» k_{transv} тем большей, чем короче пружины в растянутом состоянии:

$$F_y = k_{transv} y = 2F_0 \cdot \frac{y}{\ell_0 + \Delta x}$$

Здесь $F_0 = k \cdot \Delta x$ – сила натяжения пружин в состоянии равновесия. Соответственно, циклическая частота колебаний вдоль OY равна

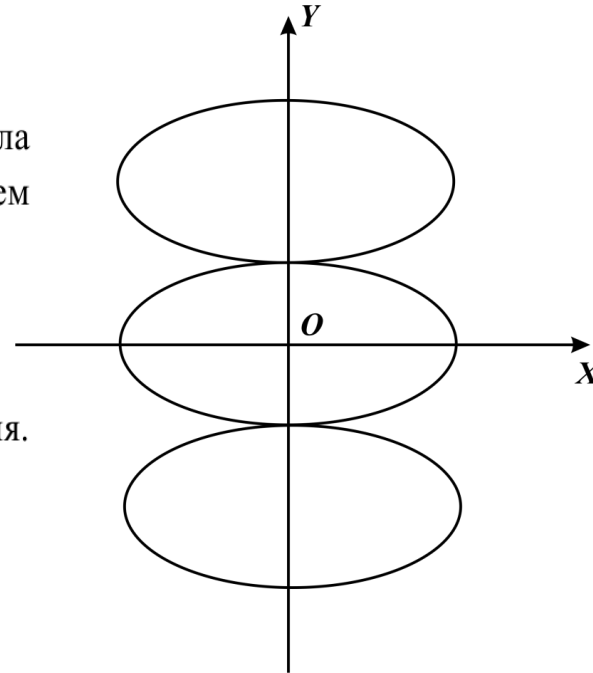
$$\omega_y = \sqrt{\frac{2k}{m} \cdot \frac{\Delta x}{\ell_0 + \Delta x}} \quad (2)$$

По виду траектории результирующих колебаний можно определить, что частота колебаний вдоль оси OX в три раза больше:

$\omega_y/\omega_x = 1/3$. Разделив (2) на (1), получим:

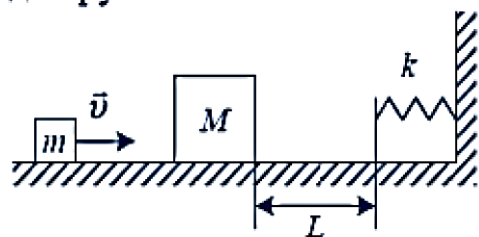
$$\frac{\Delta x}{\ell_0 + \Delta x} = \frac{1}{9}, \text{ откуда } \Delta x = \frac{1}{8} \ell_0$$

Ответ: $\Delta x = \ell_0/8$



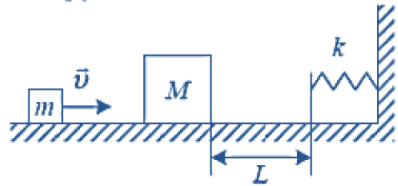
Задача 2

Небольшой брусок массой $m = 100$ г, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности, абсолютно неупруго сталкивается с неподвижным телом массой $M = 2m$. При дальнейшем поступательном движении тела налетают на недеформированную пружину, одним концом прикреплённую к стене (см. рисунок). Через какое время t после абсолютно неупругого удара бруски вернутся в точку столкновения? Скорость движения бруска до столкновения $v = 2$ м/с, жёсткость пружины $k = 30$ Н/м, а расстояние от точки столкновения до пружины $L = 10$ см.



Задача 2

Небольшой брусок массой $m = 100$ г, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности, абсолютно неупруго сталкивается с неподвижным телом массой $M = 2m$. При дальнейшем поступательном движении тела налетают на недеформированную пружину, одним концом прикреплённую к стене (см. рисунок). Через какое время t после абсолютно неупругого удара бруски вернутся в точку столкновения? Скорость движения бруска до столкновения $v = 2$ м/с, жёсткость пружины $k = 30$ Н/м, а расстояние от точки столкновения до пружины $L = 10$ см.



Решение

1. В процессе абсолютно неупругого столкновения сохраняется суммарный импульс системы тел: $mv = (m + M)v_1$, где v_1 – скорость тел после столкновения.

2. Так как поверхность гладкая, то трения нет, и движение тел от момента удара до момента касания свободного конца пружины будет равномерным: $L = v_1 t_1$, где t_1 – время движения на этом участке.

3. После касания пружины и до отрыва от неё тела будут двигаться, совершая гармоническое колебание. До отрыва пройдет время $t_2 = \frac{T}{2}$, где T – период колебаний груза на пружине: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m + M}{k}}$.

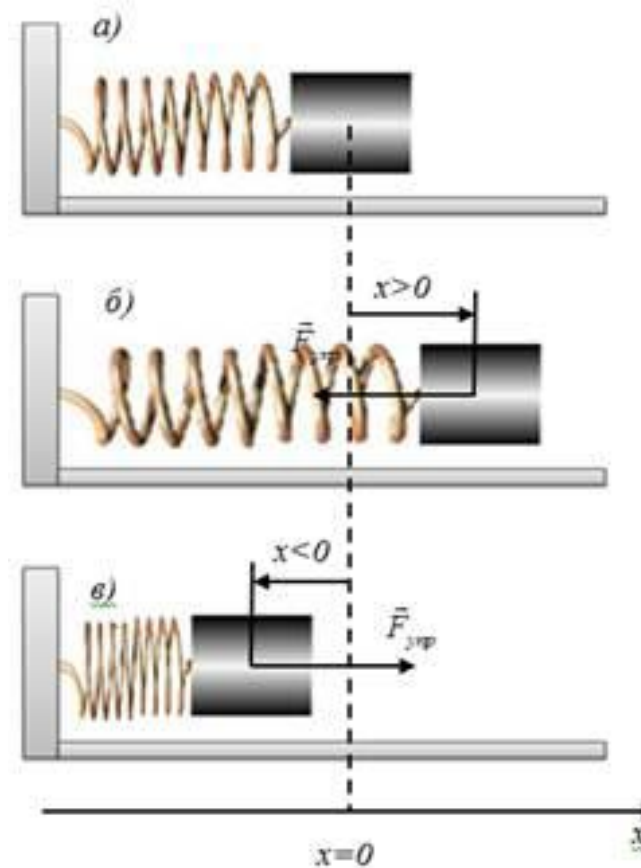
4. Отрыв тел от пружины произойдёт в точке касания пружины. По закону сохранения механической энергии при гармонических колебаниях, скорость тел в точке отрыва равна v_1 . Дальнейшее движение тел будет равномерным. Поэтому полное время движения тел до точки столкновения

$$t = 2t_1 + t_2 = \frac{2L}{v_1} + \frac{T}{2} = \frac{2L(m+M)}{mv} + \pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}.$$

Учитывая, что $M = 2m$, получим

$$t = \frac{6L}{v} + \pi\sqrt{\frac{3m}{k}} = \frac{6 \cdot 0,1}{2} + 3,14 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 0,1}{30}} = 0,614 \text{ с.}$$

Ответ: 0,614 с.



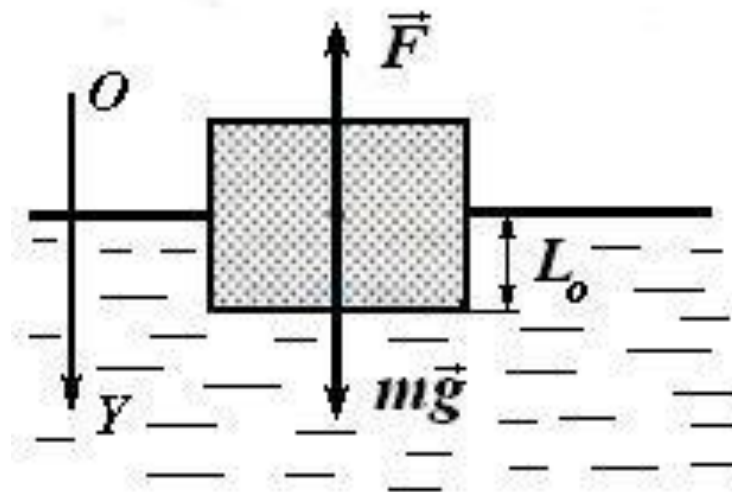
В некоторых задачах требуется определить период или частоту колебаний. Готовой формулы при этом может не быть. Какой алгоритм? Надо попытаться выразить возвращающую силу по образу и подобию упругой силы, $F_{упр} = -kx$. «Жесткость» k получится сама собой как комбинация некоторых характеристик системы, рассматриваемой в задаче. Рассмотрим это на примере.

Задача 4. Какова частота собственных колебаний соснового бруска

массой $m = 1,3 \text{ кг}$ и площадью поперечного сечения

$S = 160 \text{ см}^2$, плавающего в вертикальном положении в озере?

Плотность древесины $\rho = 520 \text{ кг/м}^3$.



Решение.

Брусек плавает в озере, сила Архимеда уравнивает силу тяжести.

$$mg = \rho g V_p$$

Если мы чуть надавим и погрузим брусок чуть больше, то возникнет добавка к уже ранее погруженной части, дополнительный погруженный объем, и «излишек» силы Архимеда, который и станет возвращающей силой и вызовет колебания бруска, когда мы его отпустим.

Этот «излишек» Архимедовой силы равен $\Delta F_A = \rho g S \Delta x$

где Δx – дополнительная глубина, на которую мы погрузили брусок.

Эту силу можно считать «силой упругости воды», и записать так:

$$\rho g S \Delta x = k \Delta x$$

Тогда «коэффициент упругости воды» будет равен

$$k = \rho g S$$

Частота колебаний определяется формулой

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^3 \cdot 10 \cdot 160 \cdot 10^{-4}}{1,3}} = 1,76$$

Ответ: 1,76 Гц.

Иногда хорошим способом является получение уравнения колебаний в виде

$$a = Cx,$$

где C будет опять же комбинацией величин, встречающихся в задаче, и представлять собой на этот раз квадрат циклической частоты колебаний, ω^2 . То есть, $a = \omega^2 x$. И это уже по сути, дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний. Рассмотрим это на примере колебаний заряженной материальной точки под действием кулоновских сил

Задача 5

По гладкой горизонтальной направляющей длиной $2l$ скользит бусинка с положительным зарядом Q и массой m . На концах направляющей находятся положительные заряды q (см. рисунок). Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен T .



Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд увеличить в 2 раза?

Решение

При небольшом смещении x бусинки от положения равновесия ($|x| \ll \ell$) на нее действует возвращающая сила:

$$F_x = k \frac{qQ}{(l+x)^2} - k \frac{qQ}{(l-x)^2} = kqQ \frac{(l-x)^2 - (l+x)^2}{(l+x)^2(l-x)^2} = -kqQ \frac{4lx}{(l+x)^2(l-x)^2} \approx -k \frac{4qQ}{l^3} x,$$

пропорциональная смещению x .

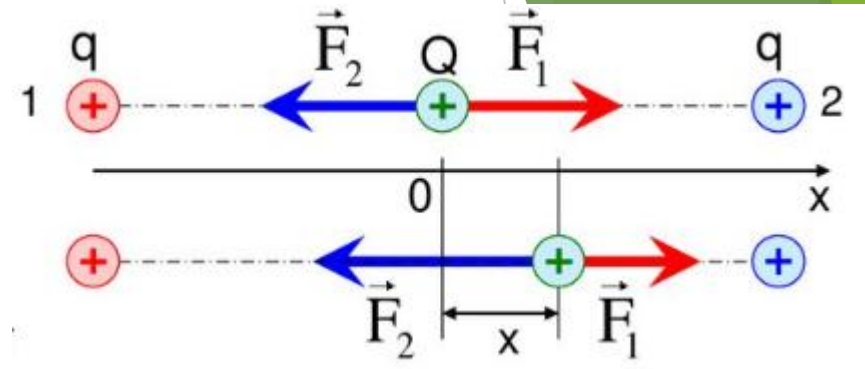
Ускорение бусинки, в соответствии со вторым законом Ньютона, $ma = -k \frac{4qQ}{l^3} x$ пропорционально смещению x .

При такой зависимости ускорения от смещения бусинка совершает гармонические колебания, период которых $T = \pi \sqrt{\frac{m\ell^3}{kqQ}}$

При увеличении заряда бусинки в два раза, $Q' = 2Q$ период колебаний уменьшится:

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{Q}{Q'}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

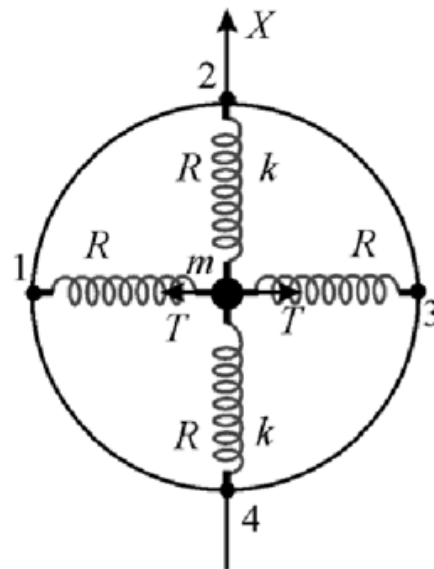
Ответ: период составит $T' = \frac{T}{\sqrt{2}}$



Задача очень интересная...

На гладкой горизонтальной плоскости лежит закреплённый обруч радиусом $R = 50$ см, в центре которого постоит грузик массой $m = 1$ кг, к которому прикреплены четыре невесомые пружины (№№ 1 – 4), другие концы которых прикреплены к обручу через равные угловые промежутки по 90° (см. рис.). Две пружины напротив друг друга натянуты с одинаковыми силами $T = 1$ Н, а две остальные не натянуты и имеют одинаковые коэффициенты упругости $k = 1$ Н/м. Грузик смещают вдоль оси X , направленной перпендикулярно натянутым пружинам, на малое расстояние $x_0 = 1$ см от положения равновесия, и отпускают без начальной скорости в момент времени $t = 0$. Запишите закон движения грузика вдоль оси X .

Какие законы Вы использовали для описания движения грузика? Обоснуйте их применимость к данному случаю.



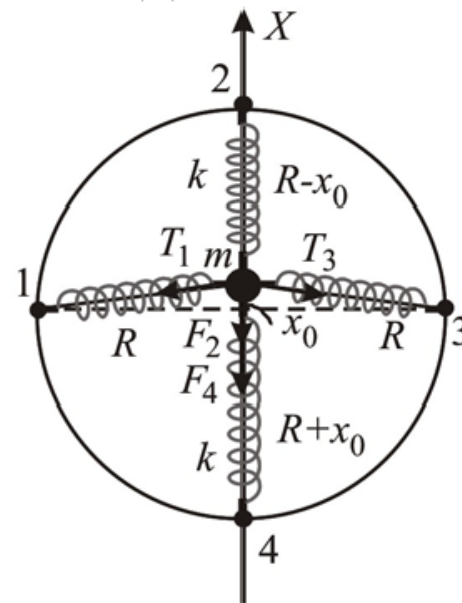
Решение

Обоснование

Для описания движения груза используются закон Гука и второй закон Ньютона. Закон Гука выполняется для малых деформаций пружин. Второй закон Ньютона справедлив в инерциальных системах отсчёта. Так как у груза есть положение равновесия, то движение груза может иметь колебательный характер. Поскольку начальное смещение груза мало по сравнению с радиусом обруча, и трение отсутствует, то можно использовать закон Гука и рассчитывать на то, что колебания груза будут гармоническими. В связи с этим целесообразно попытаться свести уравнения движения груза к уравнению гармонических колебаний. Для этого может оказаться необходимым использовать приближенные соотношения геометрического характера, справедливые при малых смещениях груза (или углах отклонения пружин).

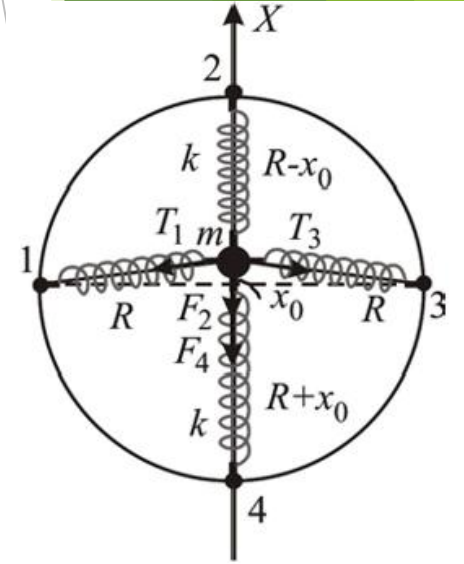
Решение

1. Запишем уравнение движения груза в проекции на ось X . Для этого определим вначале проекции на эту ось всех сил, действующих на него после смещения груза на расстояние x_0 .
2. Изобразим эти силы после начального смещения груза на расстояние x_0 вдоль оси X (см. рис.).



Продолжение решения задачи с обручем и пружинами

3. Проекции сил $F_{2x} = -kx_0$ и $F_{4x} = -kx_0$ возникают по закону Гука из-за сжатия пружины № 2 и растяжения пружины № 4.
4. Натянутые с силами T пружины № 1 и № 3 поворачиваются на малый угол $\alpha \approx x_0/R = 1/50 = 0,02$ радиана, практически не меняя своей длины и силы натяжения, так что $T_{1x} = T_{3x} \approx -T \cdot \alpha \approx -T \cdot x_0/R$.
5. Таким образом, второй закон Ньютона для груза в проекции на ось X в момент $t = 0$ имеет вид: $ma_x = F_{2x} + F_{4x} + T_{1x} + T_{3x} = -2(k + T/R) \cdot x_0$, и аналогичный вид уравнения будет и при $x \leq x_0$: $ma_x = -2(k + T/R) \cdot x$, а это – уравнение гармонических колебаний $a_x = -\omega^2 x$ с угловой частотой $\omega = [2(k + T/R)/m]^{0,5} = [2(1 + 1/0,5)/1]^{0,5} = 6^{0,5} \approx 2,45 \text{ с}^{-1}$.
6. При $t = 0$ отклонение груза максимально: $x = x_0$ – это амплитуда возникающих гармонических колебаний, а затем отклонение x под действием возвращающих сил убывает, и колебания происходят по косинусоидальному закону (в сист. СИ): $x(t) = x_0 \cdot \cos \omega t \approx 0,01 \cdot \cos(2,45 \cdot t)$.



Ответ: $x(t) = x_0 \cdot \cos \omega t \approx 0,01 \cdot \cos(2,45 \cdot t)$, где $\omega = [2(k + T/R)/m]^{0,5}$

Математический маятник в поле внешних сил
помимо силы тяжести

Алгоритм:

- 1) Маятник надо «успокоить»
- 2) Записать для такого маятника 2 закон Ньютона и найти силу натяжения подвеса N_0 | в отсутствие колебаний
- 3) Найти «эквивалентное ускорение свободного падения $g_{\text{экв}}$ по формуле

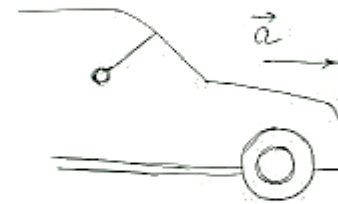
$$g_{\text{экв}} = N_0/m$$

Примеры

- а) Маятник в лифте, поднимающемся с ускорением a (считать его заданным)
- б) Маятник в автомобиле, имеющем горизонтальное ускорение a (также считать его заданным)
- в) Маятник, имеющий заряд q , совершающий колебания в однородном электрическом поле, вектор напряженности которого направлен вниз

Домашнее задание
по практикуму : вывести
формулы для случаев
а), б), в).

Считать известными длину маятника l , массу груза m и ускорение свободного падения g





СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!